Correction du devoir Maison n°4

Exercice 1

Pour son vélo, Paul possède un antivol à code. Le code est une succession de trois chiffres compris entre 0 et 9. Il y a donc ordre et remise, on utilise donc les p-listes.

1. $10 \times 10 \times 10 = 10^3$ (10 choix à chaque tirage)
2. $1 \times 10 \times 10 = 10^2$ (10 choix à chaque tirage)
3. $10 \times 10 \times 5 = 5 \times 10^2$
4. $5 \times 5 \times 5 = 5^3$ (5 choix à chaque tirage)
5. $5 \times 5 \times 5 = 5^3$ (5 choix à chaque tirage)
6. On pose $A = \{$codes ayant au moins un chiffre pair$\}$.
   $\bar{A} = \{$codes n'ayant aucun chiffre pair$\}$ et $E = \{codes\}$.
   $Card(A) = Card(E) - Card(\bar{A}) = 10^3 - 5^3$
7. $A = \{$codes dont le premier chiffre est l'unique chiffre pair$\}$ donc $Card(A) = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$.
   Il reste maintenant à choisir la place de ce chiffre pair, soit 3 possibilités d'où 3×5^3.

Exercice 2

1. (a) $D_g = \mathbb{R}_+^*$.

   (b) La dérivée de g vaut: $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$. Déterminons son signe:
   $g'(x) \geq 0 \iff 1 - \frac{1}{x} \geq 0 \iff 1 \geq \frac{1}{x} \iff x \geq 1$. On notera que le signe de l'inégalité n'a pas changé car on restreint notre étude à $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a donc le tableau de variation suivant:

x	0		1		$+\infty$
g'	|	-	|	+	
g	|	$\searrow$		$\nearrow$	

   (c) Par lecture du tableau de variations, la fonction g admet un minimum en 1 qui vaut $g(1) = 0$. Par conséquent, $\forall x > 0, g(x) \geq 0$, donc $\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$.

2. (a) La fonction $x \to \frac{x\ln(x)}{x-1}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. La fonction f étant définie séparément en 1, $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

   (b) Calculons f'. Posons $\begin{cases} u(x) = x\ln(x) \\ v(x) = x - 1 \end{cases}$, on a alors $\begin{cases} u'(x) = \ln(x) + \frac{x}{x} = \ln(x) + 1 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ et donc

   $$f'(x) = \frac{(\ln(x)+1)(x-1) - x\ln(x)}{(x-1)^2} = \frac{x - 1 - \ln(x)}{(x-1)^2} = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$$

   On a montré en question 1(c) que $\forall x > 0,\ g(x) \geq 0$, d'où le tableau de variation suivant:

x	0		$+\infty$
f'	|	+	
f	|	$\nearrow$	

(c) • Par croissances comparées $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$. Par conséquent $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

• $\lim\limits_{x\to 1^-} x\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} x-1 = 0$ on a donc une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Posons $X = x-1$, lorsque $x \to 1^-$, $X \to 0^-$. Donc
$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x\ln(x)}{x-1} = \lim\limits_{X\to 0^-} \frac{(X+1)\ln(X+1)}{X} = \lim\limits_{X\to 0^-} (X+1)\times\frac{\ln(X+1)}{X}$
Or on sait que $\lim\limits_{X\to 0} \frac{\ln(X+1)}{X} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x\ln(x)}{x-1} = 1$.

• Le calcul précédent est valable pour $x \to 1^+$. On fait le même changement de variable, on a alors $X \to 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x\ln(x)}{x-1} = 1$.

• Puisque $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1$, f admet une limite en 1 qui vaut 1.

• En $+\infty$ on a une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. On met en facteur le terme dominant.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\ln(x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\ln(x)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{1-\frac{1}{x}} = +\infty$
car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x} = 1$.

Exercice 3

1. (a) $P(\{PB_1\}) = P(\{P\}) \times P_{\{P\}}(B_1) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$.

(b) $P(\{PA_1\}) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$, $\quad P(\{FA_1\}) = \dfrac{1}{2}\times 1 = \dfrac{1}{2}$ $\quad$ et $\quad P(\{FB_1\}) = 0$.

(c) (F,P) forme un système complet d'évènement donc : $P(A_1) = P(\{FA_1\}) + P(\{PA_1\}) = \dfrac{5}{6}$ et $P(B_1) = P(\{FB_1\}) + P(\{PB_1\}) = \dfrac{1}{6}$

2. (a) $\underline{P_{A_n}(A_{n+1})}$: Il s'agit de la probabilité conditionnelle que la boule blanche soit dans l'urne U_1 à l'instant $t = n+1$ sachant qu'elle est dans l'urne U_1 à l'instant $t = n$.

instant $t=n$			instant $t=n+1$	
1 B 2 N	2N	$\overset{\mathcal{E}}{\hookrightarrow}$	1 B 2 N	2N
U_1	U_2		U_1	U_2

Par conséquent, si la boule blanche est dans l'urne U_1 à l'instant n, pour qu'elle soit dans l'urne U_1 à l'instant $t = n+1$, il est nécessaire et suffisant que la pièce fournisse Pile (donc on pioche dans U_1) et que l'on pioche une boule noire dans l'urne U_1 (qui contient 1 blanche et 2 noires)ou que la pièce fournisse Face (donc on pioche dans l'urne U_2) et que l'on pioche une boule noire dans l'urne U_2 (qui contient donc 2 noires),
c'est-à-dire que l'on a la réalisation de l'évènement $\{P\overline{B_1}\} \cup \{\overline{PB_2}\}$ donc

$$\begin{aligned} P_{A_n}(A_{n+1}) &= P(\{P\overline{B_1}\} \cup \{\overline{PB_2}\}) = p(\{P\overline{B_1}\}) + p(\{\overline{PB_2}\}) = p(P)p_P(\overline{B_1}) + p(\overline{P})p_{\overline{P}}(\overline{B_1}) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\times\frac{2}{2} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$\underline{P_{B_n}(A_{n+1})}$: Il s'agit de la probabilité conditionnelle que la boule blanche soit dans l'urne U_1 à l'instant $t = n+1$ sachant qu'elle est dans l'urne U_2 à l'instant $t = n$.

instant $t=n$			instant $t=n+1$	
2 N	1 B 2N	$\overset{\mathcal{E}}{\hookrightarrow}$	1 B 2 N	2N
U_1	U_2		U_1	U_2

Par conséquent, si la boule blanche est dans l'urne U_2 à l'instant n, pour qu'elle soit dans l'urne U_1 à l'instant $t = n+1$, il est nécessaire et suffisant que la pièce fournisse Face (donc on pioche dans U_2) et que l'on pioche la boule blanche dans l'urne U_2 (qui contient 1 blanche et 2 noires), c'est-à-dire que l'on a la réalisation de l'évènement $\{\overline{P}B_2\}$ donc

$$\begin{aligned} P_{B_n}(A_{n+1}) &= P(\{\overline{P}B_2\}) = p(\overline{P})p_{\overline{P}}(B_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(b) $P_{A_n}(B_{n+1})$: Il s'agit de la probabilité conditionnelle que la boule blanche soit dans l'urne U_2 à l'instant $t = n+1$ sachant qu'elle est dans l'urne U_1 à l'instant $t = n$.

instant $t = n$			instant $t = n+1$	
1 B 2 N	2N	$\overset{\mathcal{E}}{\hookrightarrow}$	2 N	1 B 2N
U_1	U_2		U_1	U_2

Par conséquent, si la boule blanche est dans l'urne U_1 à l'instant n, pour qu'elle soit dans l'urne U_2 à l'instant $t = n+1$, il est nécessaire et suffisant que la pièce fournisse Pile (donc on pioche dans U_1) et que l'on pioche la boule blanche dans l'urne U_1 (qui contient 1 blanche et 2 noires), c'est-à-dire que l'on a la réalisation de l'évènement $\{PB_1\}$ donc

$$P_{A_n}(B_{n+1}) = P(\{PB_1\}) = \frac{1}{6}$$

$P_{B_n}(B_{n+1})$: Il s'agit de la probabilité conditionnelle que la boule blanche soit dans l'urne U_2 à l'instant $t = n+1$ sachant qu'elle est dans l'urne U_2 à l'instant $t = n$.

instant $t = n$			instant $t = n+1$	
2 N	1 B 2N	$\overset{\mathcal{E}}{\hookrightarrow}$	2 N	1 B 2N
U_1	U_2		U_1	U_2

Par conséquent, si la boule blanche est dans l'urne U_2 à l'instant n, pour qu'elle soit dans l'urne U_2 à l'instant $t = n+1$, il est nécessaire et suffisant
que la pièce fournisse Pile (donc on pioche dans U_1) et que l'on pioche une boule noire dans l'urne U_1 (qui contient 2 noires)
ou
que la pièce fournisse Face (donc on pioche dans l'urne U_2) et que l'on pioche une boule noire dans l'urne U_2 (qui contient donc 1 blanche et 2 noires),
c'est-à-dire que l'on a la réalisation de l'évènement $\{P\overline{B_1}\} \cup \{\overline{P}\overline{B_2}\}$ donc

$$\begin{aligned} P_{B_n}(B_{n+1}) &= P(\{P\overline{B_1}\} \cup \{\overline{P}\overline{B_2}\}) = p(\{P\overline{B_1}\}) + p(\{\overline{P}\overline{B_2}\}) = p(P)p_P(\overline{B_1}) + p(\overline{P})p_{\overline{P}}(\overline{B_1}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

(c) La position de la boule blanche dépend de la position de la boule blanche à l'instant précédent et du résultat du lancer de pièce. Etant donné que la position de la pièce à l'instant précédent est antérieure au résultat de la pièce, on choisit comme système complet d'évènements (A_n, B_n)

et non $(P, \overline{P})$.
En outre, le sujet mentionne que le calcul des quatres probabilités conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(A_{n+1})$, $P_{A_n}(B_{n+1})$ et $P_{B_n}(B_{n+1})$ donc le sujet suggère que le système complet à considérer est (A_n, B_n).
La formule des probabilités totales nous donne

$$\begin{cases} (1): \quad p(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + p(B_n \cap A_{n+1}) = p(A_n)p_{A_n}(A_{n+1}) + p(B_n)p_{B_n}(A_{n+1}) = \dfrac{5}{6}p(A_n) + \dfrac{1}{6}p(B_n) \\ (2): \quad p(B_{n+1}) = P(A_n \cap B_{n+1}) + p(B_n \cap B_{n+1}) = p(A_n)p_{A_n}(B_{n+1}) + p(B_n)p_{B_n}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{6}p(A_n) + \dfrac{5}{6}p(B_n) \end{cases}$$

(d) Puisque le système (A_n, B_n) est complet, on a $P(A_n) + P(B_n) = 1$.
La formule (1) combinée au fait que $p(B_n) = 1 - p(A_n)$ nous donne

$$p(A_{n+1}) = \frac{5}{6}p(A_n) + \frac{1}{6}(1 - p(A_n)) = \frac{2}{3}p(A_n) + \frac{1}{6}$$

De même la formule (2) combinée au fait que $p(A_n) = 1 - p(B_n)$ nous donne

$$p(B_{n+1}) = \frac{1}{6}(1 - p(B_n)) + \frac{5}{6}p(B_n) = \frac{2}{3}p(B_n) + \frac{1}{6}$$

(e) Les suites $(p(A_n))_{n\geqslant 0}$ et $(p(B_n))_{n\geqslant 0}$ sont arithmético-géométriques. Pour l'explicitation de $p(A_n)$, on recherche la constante L vérifiant

$$L = \frac{2}{3}L + \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{3}L = \frac{1}{6} \Leftrightarrow L = \frac{1}{2}$$

on introduit alors la suite u définie par $\forall n \geqslant 1, \quad u_n = p(A_n) - \dfrac{1}{2}$. On a

$$u_{n+1} = p(A_{n+1}) - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}p(A_n) + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}p(A_n) - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}(p(A_n) - \frac{1}{2}) = \frac{2}{3}u_n$$

Par conséquent, la suite u est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ donc

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n u_0 \Leftrightarrow p(A_n) - \frac{1}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \left[p(A_0) - \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow p(A_n) = \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^n \left[1 - \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow p(A_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(puisque $p(A_0)$ est la probabilité que la boule blanche soit dans l'urne U_1 à l'issue de zéro répétition de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire que la boule blanche soit dans l'urne U_1 au départ)
Les calculs pour la suite $(p(B_n))_{n\geqslant 0}$ étant absolument identique, on a

$$\forall n \geqslant 0, \quad p(B_n) = \frac{1}{2} + (\frac{2}{3})^n \left[p(B_0) - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} + (\frac{2}{3})^n \left[0 - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^n$$

(puisque $p(B_0)$ est la probabilité que la boule blanche soit dans l'urne U_2 à l'issue de zéro répétition de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire que la boule blanche soit dans l'urne U_2 au départ)

Exercice 4

1. (a) Si le joueur gagne la n-ème partie il mise sur 3 numéros donc $P_{A_n}(A_{n+1}) = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.
Sinon, il mise sur 2 numéros donc $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star, \ P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{1}{6}.}$$

$\{A_n, \overline{A_n}\}$ est un système complet d'événements fini donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{6}(1-p_n) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)p_n + \frac{1}{6}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ p_{n+1} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}.}$$

(b) Tout d'abord,

$$x = \frac{1}{12}x + \frac{1}{6} \iff \frac{11}{12}x = \frac{1}{6} \iff x = \frac{2}{11}.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$p_{n+1} - \frac{2}{11} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{12}\frac{2}{11} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}\left(p_n - \frac{2}{11}\right).$$

$$\boxed{\left(p_n - \frac{2}{11}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star} \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{12}.}$$

(c) $\left(p_n - \frac{2}{11}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ étant géométrique de raison $\frac{1}{12}$, on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ p_n - \frac{2}{11} = \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{2}{11}\right).$$

De plus, $p_1 = P(A_1) = \frac{1}{12}$ d'où:

$$\forall \in \mathbb{N}^\star,\ p_n = \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{12} - \frac{2}{11}\right) + \frac{2}{11} = \frac{2}{11} - \frac{13}{132}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ p_n = \frac{2}{11} - \frac{13}{132}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}.}$$

Puisque $\left|\frac{1}{12}\right| < 1$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{2}{11}.}$$

2. (a)

$$\boxed{B_n = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{A_i}\right) \bigcap A_n.}$$

$P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{A_i}\right) > 0$ donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(B_n) = P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \dots P_{\bigcap_{i=1}^{n-2} \overline{A_i}}(\overline{A_{n-1}})P_{\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{A_i}}(A_n)$$

De plus, la façon de jouer ne dépend que du résultat précédent donc

$$\begin{aligned} P(B_n) &= P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})\dots P_{\overline{A_{n-2}}}(\overline{A_{n-1}})P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n) \\ &= P(\overline{A_1})\left(\prod_{k=1}^{n-2} P_{\overline{A_k}}(\overline{A_{k+1}})\right)P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n) = \frac{11}{12}\left(\prod_{k=1}^{n-2}\frac{5}{6}\right)\frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(B_n) = \frac{11}{72}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}.}$$

(b) $B_1 = A_1 \bigcap \left(\bigcap_{i=2}^{n} \overline{A_i}\right)$. De plus, $P\left(A_1 \bigcap \left(\bigcap_{i=2}^{n-1} \overline{A_i}\right)\right) > 0$ donc, d'après la formule des probabilités totales et en reprenant l'idée du raisonnement précédent, on a:

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P(A_1)P_{A_1}(\overline{A_2})P_{A_1\bigcap\overline{A_2}}(\overline{A_3})\dots P_{A_1\bigcap\left(\bigcap_{i=2}^{n-1}\overline{A_i}\right)}(\overline{A_n}) \\ &= P(A_1)P_{A_1}(\overline{A_2})P_{\overline{A_2}}(\overline{A_3})\dots P_{\overline{A_{n-1}}}(\overline{A_n}) = \frac{1}{12}\frac{3}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{P(B_1) = \frac{1}{16}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}.}$$

(c) Soit $k \in [\![2, n-1]\!]$. On a $B_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{A_i}\right) \bigcap A_k \bigcap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n} \overline{A_i}\right)$.

On a $P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{A_i}\right) \bigcap A_k \bigcap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n-1} \overline{A_i}\right)\right) > 0$ donc, d'après la formule des probabilités totales et en reprenant les raisonnements précédents, on a:

$$\begin{aligned} P(B_k) &= P(\overline{A_1})\left(\prod_{i=1}^{k-2} P_{\overline{A_i}}(\overline{A_{i+1}})\right)P_{\overline{A_{k-1}}}(A_k)P_{A_k}(\overline{A_{k+1}})\left(\prod_{i=k+1}^{n-1} P_{\overline{A_i}}(\overline{A_{i+1}})\right) \\ &= \frac{11}{12}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}\frac{1}{6}\frac{3}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![2, n-1]\!],\ P(B_k) = \frac{11}{96}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}.}$$

(d) $C_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ et les B_k sont deux à deux incompatibles donc

$$\begin{aligned} P(C_n) &= \sum_{k=1}^{n} P(B_k) = P(B_1) + \sum_{k=2}^{n-1} P(B_k) + P(B_n) \\ &= \frac{1}{16}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{11}{96}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} + \frac{11}{72}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \\ &= \left(\frac{1}{16}+\frac{11}{72}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + (n-2)\frac{11}{96}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(C_n) = \frac{31}{144}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + (n-2)\frac{11}{96}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}.}$$